

曲率の小さい曲線当てはめに関する一考察

柳川 実

A study of least square curve fitting with small curvature

Minoru Yanagawa

Abstract

We have developed a curve-fitting algorithm that fits the data presented in our previous report as closely as possible with minimal increment. As in the previous report, this new algorithm provides quite an impressive fit with the curve. This algorithm was formulated by observing the second differential of the curve, but with an underlying determination not to overfit the curve. Support vector machine logic was also considered; the final section contains some solutions based on applications of the kernel function in that logic to curve fitting solutions, which is the main topic of this paper.

Key words : curvature, curve fitting, method of least squares, support vector machine

1. 緒 言

曲線 $y=f(x)$ の $x=x_0$ における曲率 κ は

$$\kappa = \frac{|f''(x_0)|}{(1+f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

により与えられる。 $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ はそれぞれ $x = x_0$ における 1 階微分係数, 2 階微分係数である。変化が激しくなく, 滑らかな曲線では, 曲率 κ の大小と 2 階微分係数の絶対値の大小が密接に関係していることがわかる。

先の論文¹⁾では, 与えられた時系列的データに対して, 1 階微分係数が小さい曲線当てはめを考えた。そしてこの問題に対する一つの解として, 「イプシロン当てはめ数列」を与えた。

今回はデータに対して曲線当てはめをする際, なるべく 2 階微分係数が小さい曲線当てはめで行うことを主題にする。

2. サンプル

データ抽出の結果, 次表のデータ対 (t, x) が

得られたとする。

表 1 データの対 (t, x)

t	0	1	2	3	4	5
x	0	2.2	4	5	7	7
t	6	7	8	9	10	
x	6	6	4	1.9	0	

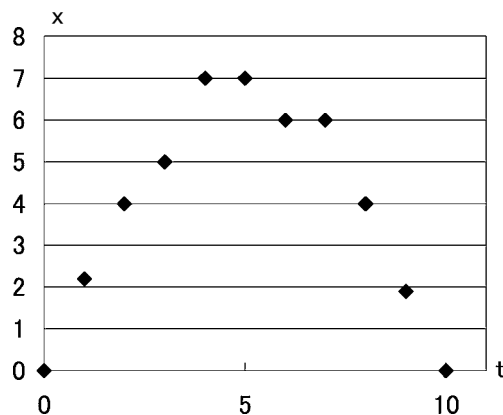


図 1 データの対 (t, x)

日本大学歯学部数理情報学教室
〒101-8310 東京都千代田区神田駿河台 1-8-13
(受理: 2008 年 9 月 26 日)

Department of Applied Mathematics and Informatics,
Nihon University School of Dentistry
1-8-13 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8310, Japan

グラフは表1のデータの散布図である。

以下で、表1のデータに対して曲線当てはめを考える。

3. イプシロン当てはめ

各点 (t_i, x_i) ($i = 0, 1, \dots, 10$) で1回微分係数 $\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}$ の小さい曲線当てはめを与える数列として、次のイプシロン当てはめ数列

$$x_1 = \frac{\varepsilon x_0 + 2.2}{\varepsilon + 1}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon x_1 + 4}{\varepsilon + 1}$$

$$x_3 = \frac{\varepsilon x_2 + 5}{\varepsilon + 1}, \quad x_4 = \frac{\varepsilon x_3 + 7}{\varepsilon + 1}$$

$$x_5 = \frac{\varepsilon x_4 + 7}{\varepsilon + 1}, \quad x_6 = \frac{\varepsilon x_5 + 6}{\varepsilon + 1}$$

$$x_7 = \frac{\varepsilon x_6 + 6}{\varepsilon + 1}, \quad x_8 = \frac{\varepsilon x_7 + 4}{\varepsilon + 1}$$

$$x_9 = \frac{\varepsilon x_8 + 1.9}{\varepsilon + 1}, \quad x_{10} = \frac{\varepsilon x_9}{\varepsilon + 1}$$

を得る¹⁾。

$\varepsilon = 0.5$ のときに、原データへのイプシロン当てはめの様子を下図に示す。

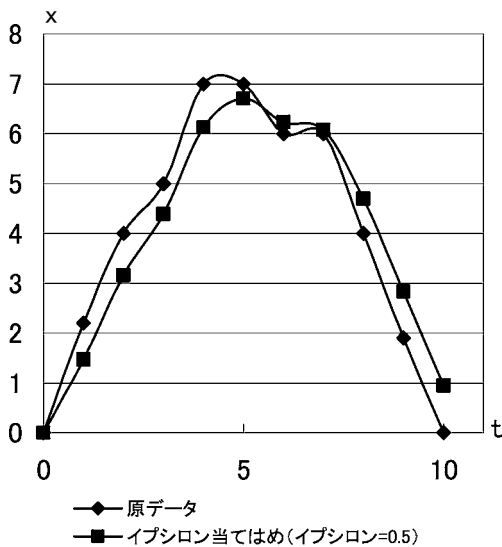


図2 イプシロン当てはめ

このイプシロン当てはめに対する2階導関数の振る舞いを下図に示す。2階微分係数の絶対値の最大値は1.228である。

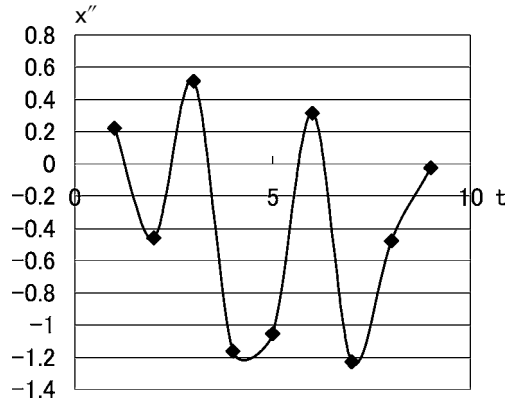


図3 イプシロン当てはめの2階微分係数 (幅=1)

4. マイルド・イプシロン当てはめ

各点 (t_i, x_i) ($i = 0, 1, \dots, 10$) で、2階微分係数 $\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{(t_{i+1}-t_i)^2}$ が小さい曲線当てはめを与える数列を求める。表1のデータに対するマイルド・イプシロン当てはめは

$$x_2 = \frac{\varepsilon(2 \times 2.2) + 4}{\varepsilon + 1}$$

$$x_3 = \frac{\varepsilon(2 \times x_2 - 2.2) + 5}{\varepsilon + 1}$$

$$x_4 = \frac{\varepsilon(2 \times x_3 - x_2) + 7}{\varepsilon + 1}$$

$$x_5 = \frac{\varepsilon(2 \times x_4 - x_3) + 7}{\varepsilon + 1}$$

$$x_6 = \frac{\varepsilon(2 \times x_5 - x_4) + 6}{\varepsilon + 1}$$

$$x_7 = \frac{\varepsilon(2 \times x_6 - x_5) + 6}{\varepsilon + 1}$$

$$x_8 = \frac{\varepsilon(2 \times x_7 - x_6) + 4}{\varepsilon + 1}$$

$$x_9 = \frac{\varepsilon(2 \times x_8 - x_7) + 1.9}{\varepsilon + 1}$$

$$x_{10} = \frac{\varepsilon(2 \times x_9 - x_8)}{\varepsilon + 1}$$

により与えられる。

$\varepsilon = 0.1, 0.5, 1.0$ の3通りについて、原データへのマイルド・イプシロン当てはめの様子を下図に示す。

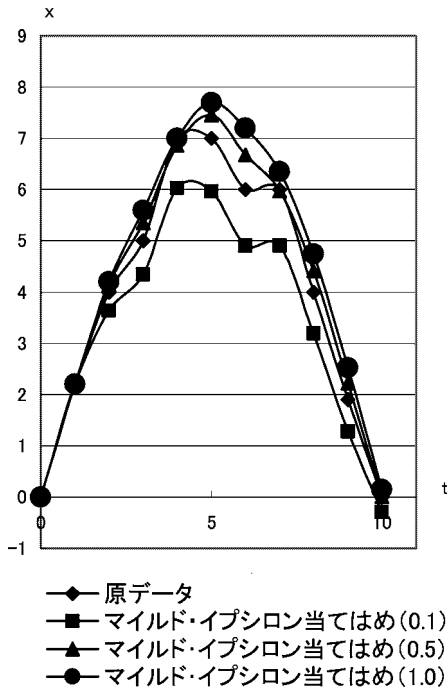


図4 マイルド・イプシロン当てはめ

これらのマイルド・イプシロン当てはめに対する2階導関数の振る舞いを下図に示す。2階微分係数の絶対値の最大値は順に1.880, 1.366, 1.200である。

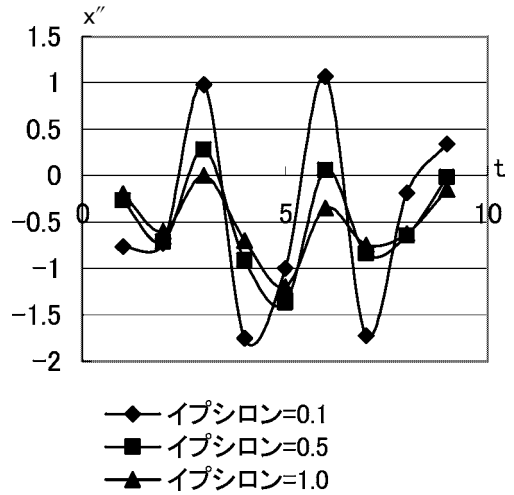


図5 マイルド・イプシロン当てはめの2階微分係数(幅=1)

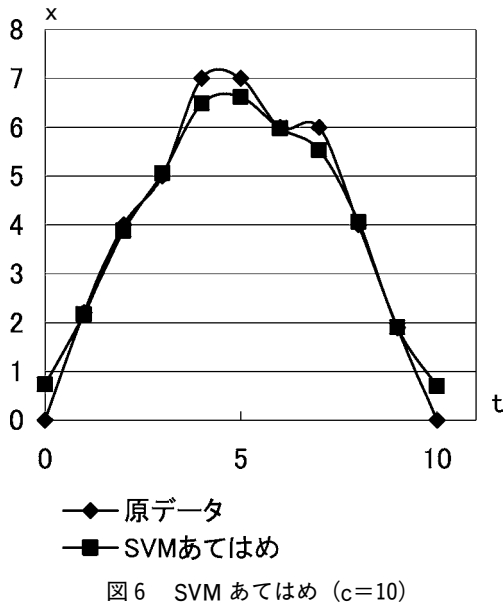
5. SVM 当てはめ

ガウシアン K によるサポートベクターマシン (SVM) の理論²⁾を用いると、表1のデータに対する最小2乗曲線当てはめを与える関数として

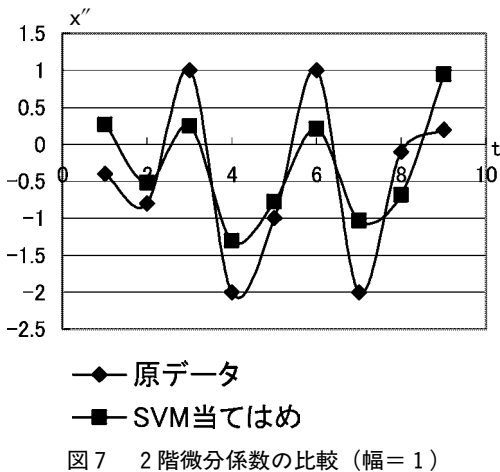
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{10} a_i K(t, t_i) \\ &= -7.35K(t, 0) + 0.3007K(t, 1) + \\ &\quad + 1.2723K(t, 2) - 0.5482K(t, 3) + \\ &\quad + 5.1412K(t, 4) + 3.855K(t, 5) + \\ &\quad + 0.3207K(t, 6) + 4.702K(t, 7) - \\ &\quad - 0.605K(t, 8) - 0.0826K(t, 9) - \\ &\quad - 7.006K(t, 10) \end{aligned}$$

が得られる。

原データ中における $x(t)$ の様子を下図に示す。



この SVM 当てはめに対する 2 階導関数の振る舞いを下図に示す。2 階微分係数の絶対値の最大値は 1.302 である。



6. 結 言

表 1 に与えられたデータに対してマイルド・イプシロン当てはめ, SVM 当てはめを行った。これら 2 通りの方法により得られた当てはめ曲線の 2 階微分係数の様子を下のグラフで比較してみる。

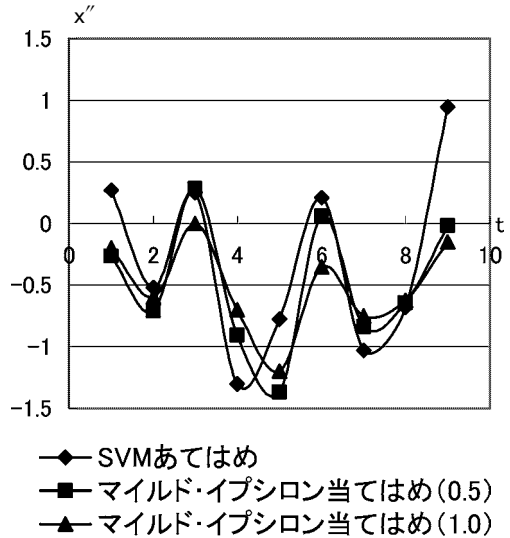


図8 SVM 当てはめとマイルド・イプシロン当てはめの 2 階微分係数 (幅=1)

上図からわかるように, マイルド・イプシロン当てはめと SVM 当てはめの 2 階微分係数の振る舞いは近い関係にある。4 のマイルド・イプシロン当てはめ曲線と 5 の SVM 当てはめ曲線は, ともに美しく整ったものである。そして, 一般的に両曲線の曲率の大きさについて, あまり差のないことが上図から予想される。

文 献

- 1) 柳川実 (2007) 曲線あてはめに関する一考察. 日大歯紀 35, 1-5
- 2) N. クリステリアニーニ, J.S. テイラー(大北剛訳) (2005) サポートベクターマシン入門. 共立出版, 東京