日本大学歯学部紀要 37，1-6，2009

ウエーブレット基底を用いる曲線当てはめについて

柳川　　実

Study of curve fitting based on wavelet theory

Minoru Yanagawa

Abstract

In this paper, we investigate methods for accurately fitting a given discrete dataset with a continuous curve. The first part of the paper deals with the use of the discrete Fourier transform (DFT), and we show that the DFT exemplifies effectiveness in the study of curve fitting. In addition, we apply the least squares method together with the DFT for higher frequency components in the Fourier decomposition of the data in order to improve the accuracy of the DFT. We actually develop a new algorithm to solve this problem. In the second part of the paper, we investigate the effectiveness of wavelet theory for use in curve fitting. We focus on the Haar wavelet, and its use in the construction of a basis for a vector space. In an attempt to improve some aspects of the Haar wavelet, particularly for those emerging at lower resolutions, we apply the DFT to the higher frequency components of the subband decomposition of the data, and obtain a new algorithm for curve fitting based on wavelet theory.

Key words: curve fitting, discrete Fourier transform, Haar wavelet, methods of least squares

1．緒　　言

先の論文[1,2]では，与えられた時系列的データに対して，１階微分係数と２階微分係数が小さい曲線当てはめの問題を考え，一つの解として，「イプシロン当てはめ数列」,「マイルドイプシロン当てはめ数列」を導くアルゴリズムを与えた。

今回はデータに対して曲線当てはめを行う際，特別な波の重ね合わせを用いる方法を採用する。

観測値の振舞いが，多数の振動数を持つ波形の混成であるという考え方が古くからあり，今でも盛んに論じられている。

本論文前半では，波形としてそれ程高くない周波数を持つ三角関数を用いる。即ち，離散フーリエ解析的近似によるデータの曲線当てはめを行う。

後半では，三角関数に代わる波形としてハールウエーブレットを採用する。規則的に構成された小さなウエーブレット波形を統合することにより，データに近い曲線が導かれるのである。

2．サンプル

最初に，先の論文[1,2]で提案されている曲線当てはめの方法と比較するために，表１のデータ対 (t, x) を考える。

表１　データの対 (t, x)

t	0	1	2	3	4	5
x	0	2.2	4	5	7	7

t	6	7	8	9	10
x	6	6	4	1.9	0

図１は表１のデータの散布図である。

日本大学歯学部数理情報学教室
〒101-8310　東京都千代田区神田駿河台１－８－13
Department of Applied Mathematics and Informatics, Nihon University School of Dentistry
1-8-13 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8310, Japan

（受理：2009年９月30日）

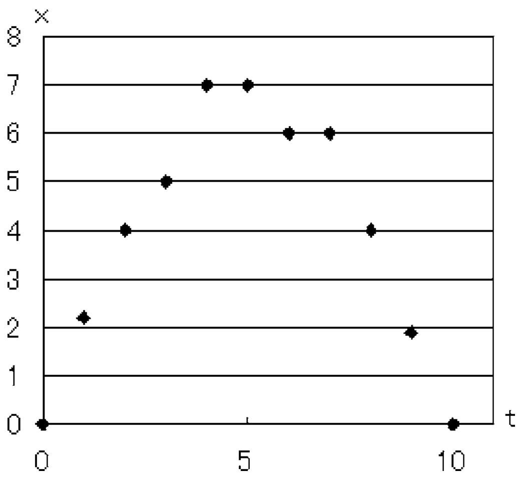

図１　データの対 (t, x)

３．離散フーリエ曲線当てはめ

正整数 N をとり，$W=\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$ とおく。フーリエ基底 $\{E_k\}_{k=0}^{N-1}$ はベクトル

$$E_k=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1\\W^k\\\vdots\\W^{(N-1)k}\end{pmatrix}$$

により構成される。フーリエ基底の実部を再び $\{E_k\}_{k=0}^{N-1}$ とかく。

各基底に対するフーリエ係数の実部 $\hat{x}$ を次に計算する。

$$\hat{x}=\begin{pmatrix}\hat{x}_0\\\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\hat{x}_3\\\hat{x}_4\\\hat{x}_5\\\hat{x}_6\\\hat{x}_7\\\hat{x}_8\\\hat{x}_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13.629\\-4.7837\\-0.97624\\-0.57639\\-0.30449\\-0.34785\\-0.30449\\-0.57639\\-0.97624\\-4.7837\end{pmatrix}$$

ベクトル $\hat{x}$ と $\{E_k\}_{k=0}^{N-1}$ により離散フーリエ的展開を計算する。表２は得られた数列 $\tilde{x}$ である。これを離散フーリエ曲線当てはめと呼ぶ。

表２　フーリエ曲線当てはめ

t	0	1	2	3	4	5
x	0	2.2	4	5	7	7
$\tilde{x}$	0	2.05	4	5.5	6.5	7

t	6	7	8	9	10
x	6	6	4	1.9	0
$\tilde{x}$	6.5	5.5	4	2.05	0

表２を次に図示する。

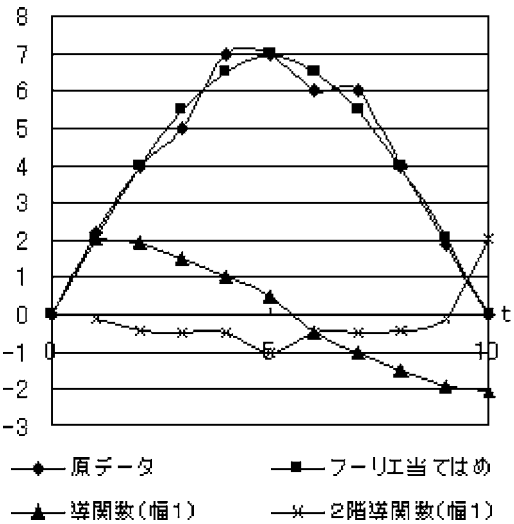

図２　フーリエ曲線当てはめ

離散フーリエ曲線当てはめが最小２乗法による曲線当てはめに比肩できる曲線当てはめの方法であることがわかる。

４．フーリエイプシロン当てはめ

各周波数にわたる $\hat{x}$ の急激な変化を避けるため，$\hat{x}$ にイプシロン当てはめ[1)]を適用する。イプシロン当てはめ数列 ξ は

$$\xi_i=\frac{\varepsilon\xi_{i-1}+\hat{x}_i}{\varepsilon+1}\qquad(i=1,\cdots,10)$$

により与えられる。

ベクトル ξ に対して $\{E_k\}_{k=0}^{N-1}$ による離散フーリエ的展開を考える。表3は，$\varepsilon=0.1$ の場合に得られた数列 x_ε である。これをフーリエイプシロン当てはめと呼ぶ。

表3　フーリエイプシロン当てはめ

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	2.2	4	5	7	7	6	6	4	1.9	0
x_ε	0.57	2.6	4.2	5.3	6.0	6.3	6.0	5.3	4.2	2.7	0.57

$\varepsilon=0.05$ と $\varepsilon=0.01$ の場合も同様に考えて，図3にデータのフーリエ曲線当てはめとフーリエイプシロン当てはめを図示する。

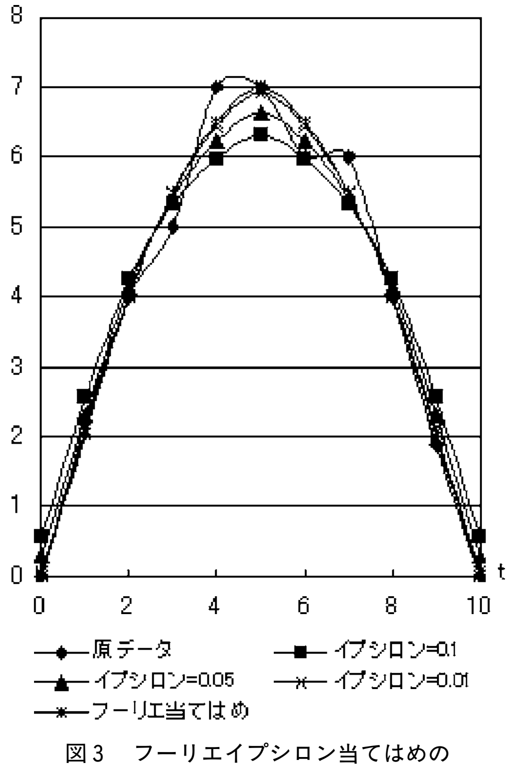

図3　フーリエイプシロン当てはめの
イプシロン比較

次に，番号 $k=3,4,5,6,7$ を持つ $\hat{x}$ の成分に対してイプシロン当てはめを適用し，新たな係数 $\hat{\xi}$ を求める。$\varepsilon=0.1$ とする。係数 $\hat{\xi}$ とベクトル系 $\{E_k\}_{k=0}^{N-1}$ による展開を行うと，次のフーリエ高周波イプシロン当てはめ数列 $\hat{x}_\varepsilon$ を得る。

表4　フーリエ高周波イプシロン当てはめ

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0	2.2	4	5	7	7	6	6	4	1.9
$\hat{x}_\varepsilon$	−0.16	2.17	3.96	5.48	6.54	6.97	6.54	5.48	3.96	2.17

下図は上表を図示したものである。

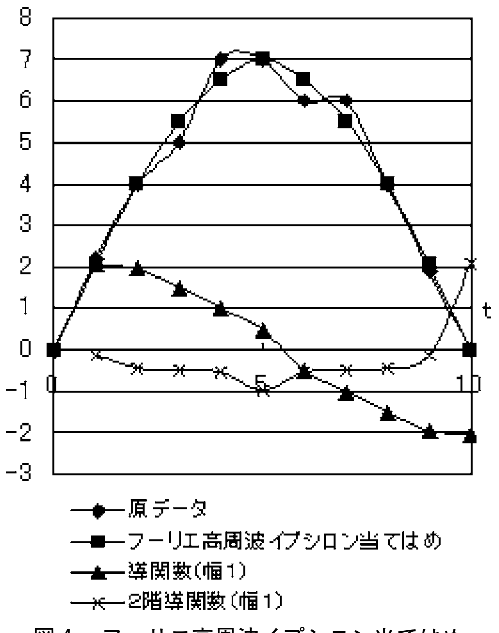

図4　フーリエ高周波イプシロン当てはめ

5．ハールウエーブレット

ハールスケーリングフィルタ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1\quad 1\quad 0\quad \cdots\quad 0)^T$$

とハールウエーブレットフィルタ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T$$

が構成する多重解像度解析を明らかにすることにより，離散ウエーブレット変換は

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

である。

表 5 のデータに対してハール離散ウエーブレット変換を行う。

表 5　データの対 (t, x)

t	0	1	2	3	4	5	6	7
x	2.2	4	5	7	6	6	4	1.9

図 5 は上表の散布図である。

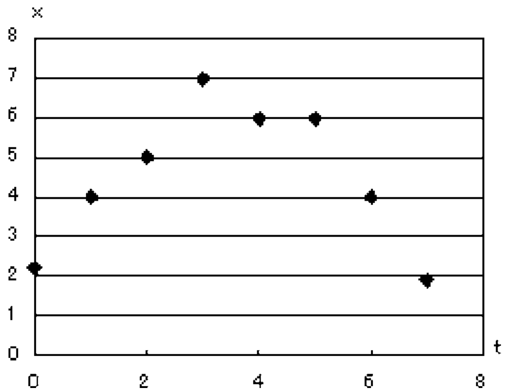

図 5　データの対 (t, x)

6．ウエーブレットイプシロン当てはめ

表 5 のデータに対して，ウエーブレット変換を用いて，レベル 3 までのサブバンド信号を求める。

表 6　サブバンド信号

No.	G 1	H 1	H 2	H 3
0	4.51	0.038	−1.45	−0.9
1	4.51	0.038	−1.45	0.9
2	4.51	0.038	1.45	−1
3	4.51	0.038	1.45	1
4	4.51	−0.038	1.53	0
5	4.51	−0.038	1.53	0
6	4.51	−0.038	−1.53	1.05
7	4.51	−0.038	−1.53	−1.05

レベル 3 のサブバンド信号に対してイプシロン当てはめを行う。ただし，$\varepsilon=0.5$ の場合をここでは考える。

レベル 3 のイプシロン当てはめ数列を用いてデータを復元する。復元されたデータを $\tilde{x}_\varepsilon$ とかく。$\tilde{x}_\varepsilon$ をウエーブレットイプシロン当てはめと呼ぶ。

表 7　ウエーブレットイプシロン当てはめ

t	0	1	2	3
x	2.2	4	5	7
$\tilde{x}_\varepsilon$	2.2	3.4	5.433	6.477
t	4	5	6	7
x	6	6	4	1.9
$\tilde{x}_\varepsilon$	6.159	6.053	3.667	2.489

図 6 は表 7 を図示したものである。

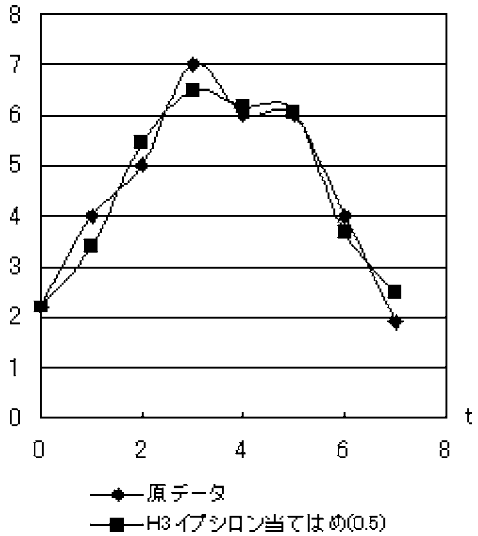

図６　ハールイプシロン当てはめ

７．ウエーブレット・フーリエイプシロン当てはめ

ウエーブレットイプシロン当てはめが十分な曲線当てはめであるためには，高位階層の多重解像度解析を必要とする。このことは，現実的計算処理に困難を与える。

ベクトル系 $\{E_k\}_{k=0}^{7}$ によるフーリエイプシロン当てはめをレベル３のサブバンド信号に適用する。$\varepsilon=0$，$\varepsilon=0.5$，$\varepsilon=1$，$\varepsilon=-0.05$ のそれぞれの場合に対して，４節のフーリエイプシロン当てはめを計算する。結果を図７に図示する。

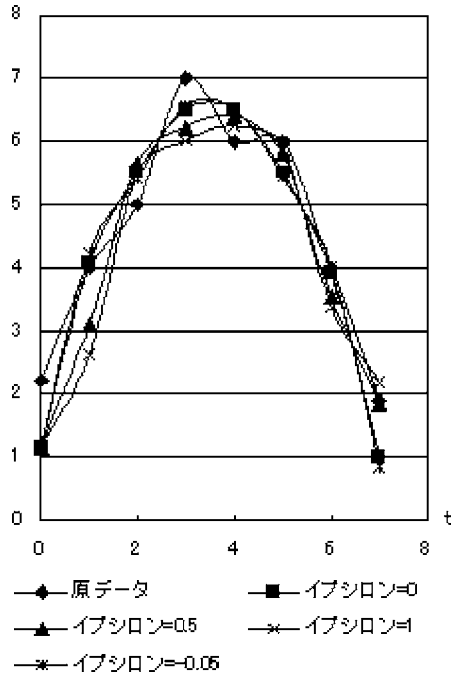

図７　ウエーブレット・フーリエイプシロン当てはめのイプシロン比較

８．結　　言

表１のデータに対してフーリエイプシロン当てはめ，フーリエ高周波イプシロン当てはめを行った。最小２乗法とは異質な，フーリエ変換の構造に手を加える当てはめ手法である。興味のある結果が得られている。６節では，単純な波形の逐次累積であるハールウエーブレットを利用した。満足な曲線当てはめには，この単純さの代わりに，高位の多重解像度解析が必要であることが示された。計算量の少ない，フーリエ当てはめの簡便さに比肩しうるウエーブレット曲線当てはめアルゴリズムを構成するには，滑らかなウエーブレットの採用が必要になる。しかし，ハールウエーブレットがエッジ検出などの，データの特異位置の検出に有効に応用できることが図８を見て理解できる。７節のウエーブレット・フーリエイプシロン曲線当てはめについて調べてみると次のようになる。

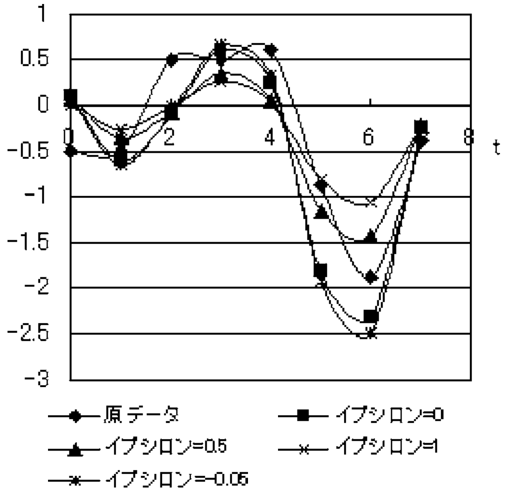

図８　ウエーブレット・フーリエイプシロン当てはめ曲線のエッジ抽出

イプシロンの値が大きくなるとエッジの程度が低くなる様子が見て取れる。そして，高エッジの場所はイプシロン値の変化に応じず不動である。

文　献

１）柳川実（2007）曲線あてはめに関する一考察．日本大学歯学部紀要 35，１－５
２）柳川実（2008）曲率の小さい曲線あてはめに関する一考察．日本大学歯学部紀要 36，１－４
３）前田肇，佐野昭，貴家仁志，原晋介（2001）ウエーブレット変換とその応用．朝倉書店，東京