

曲線当てはめによるフラクタル次元の決定

柳川 実

On the fractal dimensions by means of least square curve fittings

Minoru Yanagawa

Abstract

In this paper we present a new algorithm for the derivation of fractal dimensions for functions varying violently. We know, from the literature, various methods based on various definitions of fractal dimensions. The present paper considers an approximation scheme based on adopting the idea behind approximate curve fittings to fractal graphs. Several tests are carried out for two types of fractal curves: curves fertilized by iterated function systems (IFSs) and sample paths of Brownian bridge process, which is based on the standard Brownian motion.

Key words: Brownian bridge, curve fitting, fractal dimension, iterated function system, method of least squares

1. 緒 言

先の論文¹⁾において、離散データへの曲線当てはめを与える一つのアルゴリズムとしてイプシロン当てはめを考えた。本論文では、イプシロン当てはめを利用してフラクタル曲線のフラクタル次元を求める。フラクタル曲線として、IFS (反復関数系) によって生成される離散データのフラクタル補間曲線、そして、他に標準ブラウン運動に基づくブラウン橋見本過程扱う。これらのフラクタル曲線のフラクタル次元の理論値と、イプシロン当てはめから構成されるアルゴリズムを通じて得られるフラクタル次元の値との一致性を述べる。

2. 補間点と IFS

表 1 で与えられる xy 平面上の点を補間するフラクタル曲線を考察の対象とする。

表 1 補間点

x	0	1	2	3
y	2.2	4	5	7
x	4	5	6	7
y	6	6	4	1.9

図 1 は表 1 の補間点を結ぶ折れ線グラフである。

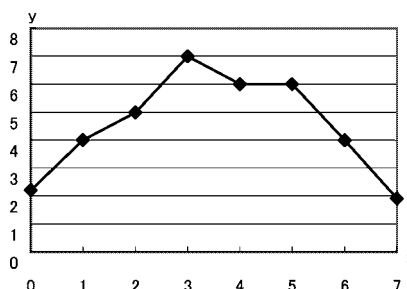


図 1 補間点を結ぶ折れ線

パラメータ $|d_n| < 1 (n=1, \dots, 7)$ に対して IFS $\{w_n\}_{n=1}^7$ として次のアフィン変換を考える。標本点を $(x_n, y_n) (n=0, 1, \dots, 7)$ とするとき

$$w_n(x) = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

ただし

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_7 - x_0}, \quad e_n = \frac{x_7 x_{n-1} - x_0 x_n}{x_7 - x_0}$$

$$c_n = \frac{y_n - y_{n-1} - d_n(y_7 - y_0)}{x_7 - x_0}$$

$$f_n = \frac{x_7 y_{n-1} - x_0 y_n - d_n(x_7 y_0 - x_0 y_7)}{x_7 - x_0}$$

IFS 写像 $W = \bigcup_{n=1}^7 w_n$ のアトラクタを S とする。

3. フラクタル次元

アトラクタ S のフラクタル次元 D は方程式

$$(1) \quad \sum |d_n| a_n^{D-1} = 1$$

の解として得られる³⁾。横軸の等間隔な位置に補間点が配置されているときは

$$(2) \quad D = 1 + \frac{\log \sum_{n=1}^7 |d_n|}{\log 7}$$

である。そこでの議論とは別に

$$(3) \quad D = 2 - \frac{\log \sum_{n=1}^7 |a_n d_n|}{\log a}$$

と示すことが出来る。ここで

$$a = (a_1 \cdots a_7)^{1/7}$$

である。横軸が等分割である場合を扱っているので、上の(3)は(2)に一致する。

各パラメータ d_n を $1 < \sum_{n=1}^7 |d_n|$ であるように選ぶと(2)から $1 < D < 2$ である。例えば $d_n = 0.3$ と一定なとき、表1の補間点に対する IFS 写像の生成するフラクタル補間曲線 S は図2のようになる。曲線 S のフラクタル次元は $D = 1.38$ である。



図2 フラクタル補間曲線 ($D=1.38$)

$d_n = 0.15$ のときは $D = 1.025$ のフラクタル曲線が得られる (図3)。

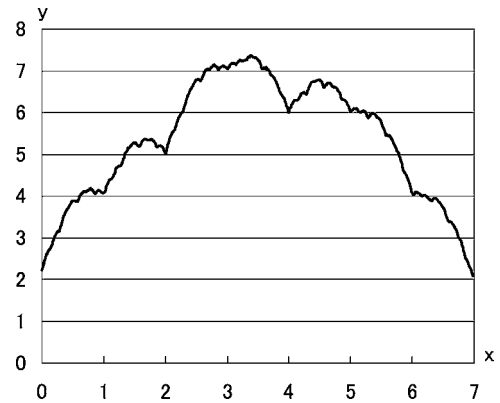


図3 フラクタル補間曲線 ($D=1.025$)

4. フラクタル補間曲線の曲線当てはめとフラクタル次元

$d_n = 0.3 (n=1, \dots, 7)$ の場合を考える。第3節で見たように、この場合のフラクタル補間曲線のフラクタル次元は式(2)から $D = 1.38$ である。ここでは図2の曲線に対するイプシロン当てはめ曲線¹⁾を利用し、実験的にフラクタル次元を求める。

下の図4は図2の曲線に対するイプシロン当てはめ曲線を $\epsilon=0.01$, $\epsilon=0.001$, $\epsilon=0.0001$ の場合に見たものである。

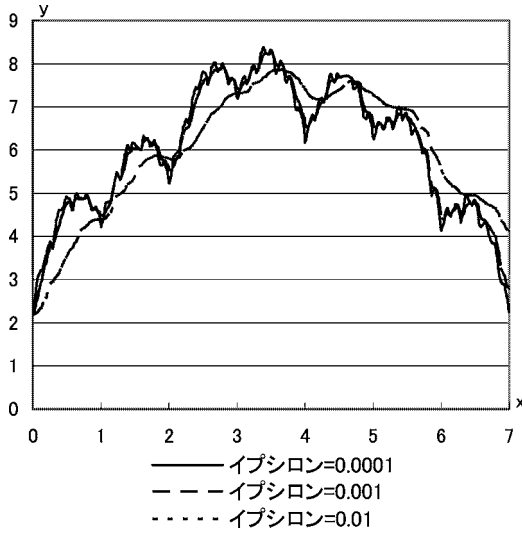


図4 イプシロン当てはめ曲線

ϵ 値を変化させたときの様子を打点したものが図5である。すべての点は傾きが0.6309である直線上に近似的に位置している。フラクタル次元の定義として(3)を用いると $D=1.3691$ である。

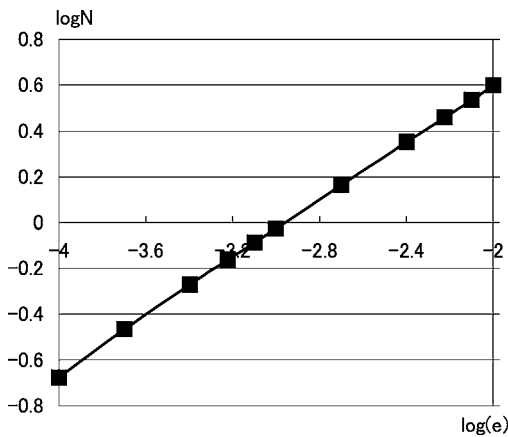


図5 HIFS 補間曲線のフラクタル次元

5. ブラウン運動曲線の曲線当てはめとフラクタル次元

標準ブラウン運動 $W(t)$ による $[0, 1]$ 上の確率微分方程式

$$dX(t) = \left(\frac{b - X(t)}{1-t} \right) dt + dW(t)$$

を満たすブラウン橋過程²⁾を考える。図6はその一つの見本過程である。

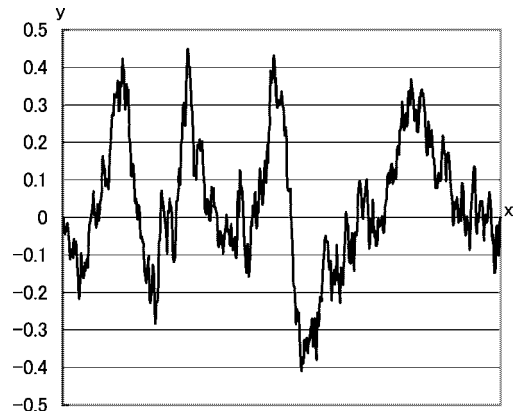


図6 標準ブラウン橋

第4節のイプシロン当てはめを用いて、この見本過程のフラクタル次元を求めてみる。

図中の点に対する回帰直線の傾きは0.5145である。このことから $D=1.4855$ となる。統計

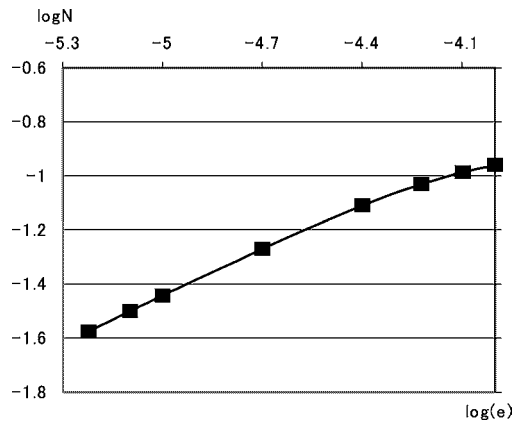


図7 ブラウン橋のフラクタル次元

的処理を行うことにより、ブラウン橋過程のフラクタル次元が本来の値 $D=1.5$ に近いことがわかる。

6. 結 言

第4節と第5節で得られた実験値が理論値に近いことが示された。即ち、IFS 補間曲線とブラウン運動見本過程の双方のフラクタル次元の導出に当たって、イプシロン当てはめによるアルゴリズムが実用的であることがわかった。

フラクタル次元は第3節の図2と図3を見て理解できるように、曲線の粗さの程度を示す。

ε の増加に伴い粗さが壊れてゆく。現実的には、崩れによる滑らかさの発展の程度が、 D を用いて与えられる数を指数とする ε の指数関数であることを示している。

文 献

- 1) 柳川実 (2007) 曲線あてはめに関する一考察. 日大歯紀 35, 1-5
- 2) B. エクセングル (谷口説男訳) (1999) 確率微分方程式. シュプリンガー・ジャパン, 東京
- 3) Barnsley, M.F. (1993) Fractals Everywhere 2nd ed., Academic Press, London